

Weit über 100 Jahre – im 20. Jahrhundert durchgängig – war die orthogonale Katasteraufnahme von Grenzpunkten eine Standardmethode, ehe sie aufgrund der instrumentellen und rechentechnischen Entwicklungen durch Polar- und GNSS-Verfahren abgelöst wurde.

Die Unsicherheiten in der klassischen orthogonalen Aufnahme

Die orthogonale Aufnahme in Verbindung mit dem Einbinde- oder Liniungsverfahren hat und hatte aber Mängel und Schwachstellen. Da man im Liegenschaftskataster zwangsläufig auf historische Unterlagen mit orthogonalen Aufnahmen zumindest bei Grenzuntersuchungen oder Koordinatenberechnungen im alten Bestand bei Fortführungsvermessungen und Katastererneuerungen zurückgreifen muss, sind Kenntnisse über deren Wirkungsweisen von bleibender Bedeutung.

Eine orthogonale Aufnahme, hier immer als tatsächliche Messmethode verstanden und nicht nur als Dokumentationsform, ist mit wenigen und einfachen Hilfsmitteln

durchführbar: Längenmesswerkzeug (Messband), Winkelprisma und Fluchtstäbe. Die wichtigsten Elemente einer orthogonalen Aufnahme sind im Titelbild aufgeführt. Die dort gezeigten Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt (siehe [1] und [2]) und in diesem Beitrag nicht weiter erläutert.

Nicht allein die Bestimmung rechter Winkel kennzeichnet die orthogonale Aufnahme, sondern sie beinhaltet als übergeordnete Aufnahmeart auch das Liniungsverfahren. Ohne das Liniungsverfahren, bestehend aus Messungslinien, Strecken und Einbindern, wären orthogonale Messungen in der Vergangenheit überhaupt nicht möglich gewesen. Für die orthogonale Aufnahmeart ist es bedeutungslos, ob die

Ausgangslage des Liniennetzes eine Netzverdichtung mit übergeordneten Anschlüssen oder ein eigenständiges, lokales und unabhängig aufgebautes Netz darstellt.

Der allein arbeitstechnische und wirtschaftliche Vorteil der Orthogonalaufnahme gegenüber dem reinen Einbindeverfahren liegt in der Reduktion der erforderlichen Anschlüsse durch mögliche vereinfachende Netzkonfigurationen (Bild 1). Orthogonale Methoden ersetzen aufwändigere Konstruktionen im Liniungsverfahren. Es sind weniger Rechenansätze für die Koordinatenermittlung von Grenzpunkten erforderlich und eine spätere Grenzuntersuchung muss nicht übermäßig weit ausgedehnt werden.

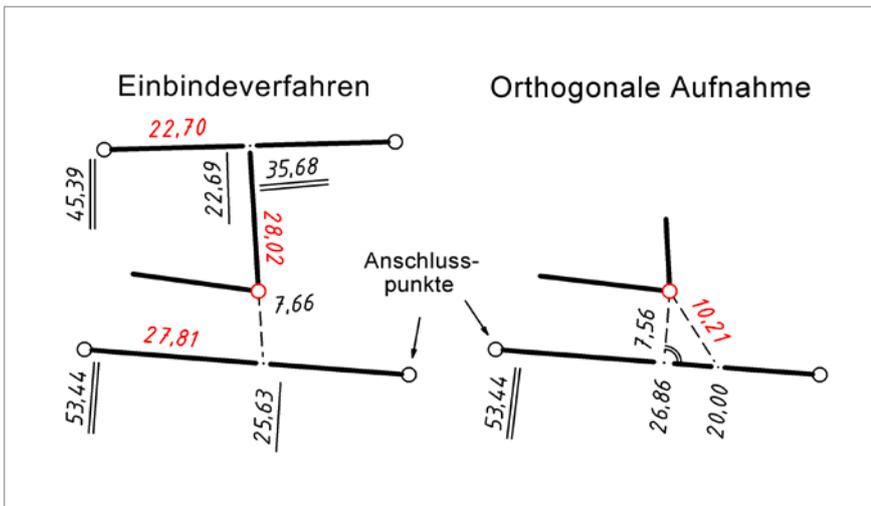


Bild 1: Vergleichende Charakteristika in einer Konfiguration mit Netzanschluss zwischen dem Einbindeverfahren und der orthogonalen Aufnahme für einen Punkt:
 Einbindeverfahren: 4 Anschlusspunkte, 3 Berechnungsansätze, 3 Kontrollen
 Orthogonale Aufnahme: 2 Anschlusspunkte, 1 Berechnungsansatz, 1 Kontrolle

Nach den preußischen Anweisungen von 1877 und 1896 ([3] und [4], § 14 Nr. 1) sowie 1881 ([5] § 76 Nr. 2) sollten Messungslinien so bestimmt werden, dass Grenzen mit Hilfe kurzer rechtwinkliger Abstände oder durch unmittelbare Schnitte aufgemessen werden konnten, dies ohne Kontrollmessungen. Ein wichtiger Teil einer späteren orthogonalen Aufnahme ist die Kontrolle der Katheten durch eine Hypotenusen-Messung in Verbindung mit der Pythagorasprobe. Im preußischen Kataster wurde zumindest andeutungsweise erstmals 1868 bzw. 1877 für eine über 40 m lange Lotrechte auf eine Pythagorasprobe hingewiesen. Sie diene nicht zur Kontrolle der Ordinatentlänge, sondern für deren Richtungsüberprüfung ([6] § 68, [3] § 14 Nr. 3). Die Bestimmung eines rechtwinkligen Abstandes zu einem Messpunkt wurde 1881 ([5] § 80 Nr. 4) und später als eine Ausnahme angesehen. Ein drittes mitbestimmendes oder versicherndes Maß musste dann hinzukommen. Eine ausdrückliche Pythagorasprobe wurde nicht gefordert. Pythagorasproben durch Messung und Berechnung von Hypotenusen im Sinne von Messungskontrollen tauchten 1882 auf [7]; dort in einer Form, die eher einer Empfehlung entsprach, ohne zwingende Bindung. Zur Beurteilung der Aufnahmetechniken sind auch Blicke in die Musterisse der damaligen Vorschriften hilfreich. Seit 1913 wurden in Preußen wirksame Sicherungsmaße vorgeschrieben [8].

Aufnahmekriterien

Die früher geführte Streitfrage, ob für einen Grenzpunkt nur eine einzige punktbestimmende, orthogonale Aufnahme zu dokumentieren war oder weitere Aufnahmevarianten erforderlich waren, ist eine Gratwanderung zwischen Praxis, rechtlicher Überzeugung und vermessungstechnischem Verständnis oder Notwendigkeit. Bereits kurz nach 1900 wurde bemängelt, dass allein die Hypotenusenmessung bei einer orthogonalen Aufnahme als Kontrolle nicht hinreichend ist:

[1909] » ... wobei der Grundsatz (bei einer Aufnahme) zu befolgen ist, daß nur solche Meßproben als wirkliche Proben angesehen werden können, deren Berechnung im Felde mit Quadrat- und anderen Hilfstafeln ohne umständliche Ableitungen unmöglich ist, daß also insbesondere Hypotenusenmessungen nur als minderwertige und darum höchstens ausnahmsweise beizubringende Meßproben anzusehen sind. Die besten Proben werden daher immer durch gleichwertige Einmessungen von verschiedenen Aufnahmelinien aus geschehen, weshalb danach zu streben ist, wenn irgend tunlich, jeden wichtigen Punkt von **wenigstens zwei Linien** aus durch Verlängerung oder rechtwinklige Aufnahme, unter Umständen **durch beide festzulegen**. « ([9] S. 59, 60)

In der Anweisung von 1881 [5] wurde in § 82 Nr. 3 verlangt:

[1881] »Jeder scharf markierte Punkt, in dessen Nähe zwei oder mehr Messungslinien vorbeiführen, muß möglichst von jeder dieser Linien aus aufgemessen werden.«

In den Ergänzungsbestimmungen 1913 [8] zur Anweisung bei Fortschreibungsvermessungen hieß es in der Nr. 62:

[1913] »Für die Aufmessung der Grenzpunkte müssen wirksame Sicherungsmaße beigebracht werden, damit etwaige Unrichtigkeiten nicht unaufgedeckt bleiben. Die Sicherungsmaße sind stets nach erfolgter Vermarkung zu ermitteln. Die Ermittlung **unnötiger Sicherungsmaße** ist zu vermeiden.«

So zeigte sich schon sehr früh eine Polarisierung der Ansichten in der Vermessung und ihrer Archivierung, dass einerseits Mehrfachbestimmungen gefordert wurden sowie andererseits eine Einsparung „unnötiger“ Maße mit der Folge einer Reduktion in der Zuverlässigkeit für spätere Aussagen und numerischer Verarbeitungen der Katasteraufnahmen.

Die Forderung nach Eindeutigkeit durch punktbestimmende Elemente zum Festlegen nur einer einzigen Punktlage ist formal richtig, setzt aber praktisch eine absolute Wiederherstellbarkeit der Ausgangslage voraus. Mehrfache Messungen erhöhen die Genauigkeit (hier die Präzision) des Ergebnisses und andere, vielfältigere Möglichkeiten einer Grenzwiederherstellung bei verloren gegangenen Anschlusspunkten. Diese Erkenntnis war damals nicht immer gegeben. Es zeigt sich heutzutage, dass die Messung bzw. Dokumentation weiterer Aufnahmevarianten für die Grenzuntersuchung von Vorteil sein kann. Zum anderen erfordert die moderne, statistisch geprägte Auswertung von Messdaten ein Muss von Überbestimmungen und Mehrfachmessungen (auch Sicherungsmaße) als Voraussetzung für eine Zuverlässigkeit der Ergebnisse, sprich der Koordinaten.

Der orthogonalen Aufnahme wurde im Gegensatz zur alleinigen Einbindemethode immer der Mangel angehaftet, dass konfigurationsbedingt bei den Ordinaten keine Fehlerverteilung möglich war. Dies war der Hauptgrund, orthogonale Verfahren abzulehnen und reine Einbindemethoden vorzuziehen.

Die Erhöhung der Ansprüche an die Güte der technischen Katasterangaben wurde ab 1920 mit dem Wort „einwandfrei“ umschrieben, heute muss der Begriff „zuverlässig“ erhalten. Der Begriff „einwandfreie Vermessung“ – vielfach noch gebräuchlich – war in NRW ab 1972 nicht mehr vorschrittentauglich, weil ein Aufnahmefehler auch in einer einwandfreien Vermessung

vorkommen konnte, und er ferner als Bezeichnung nur allgemeinsprachlich verwendet und verstanden werden konnte ohne jene katasterspezifische Bedeutung. Alleinstehende Begriffe wie „wirksam, verprobt, geprüft, gesichert“ und nicht zuletzt „kontrolliert“ entbehren ebenfalls eines näher beschriebenen qualitativen Inhalts. Was wird wie mit was und wann von wem kontrolliert?

Weitaus zuverlässiger als Pythagorasproben sind die unterirdischen Sicherungen der Grenzzeichen [10], wobei bei vorgefundenen Abmarkungen unterirdische Sicherungen nur dann herangezogen werden, wenn Fehlergrenzen im Vergleich mit dem Katasternachweis überschritten werden oder augenscheinlich Veränderungen an den Tagesmarken stattgefunden haben. Teilweise kommt es für die Grenzfeststellung auch nicht auf die gesicherte Aufmessung mit Hilfe einer Pythagorasprobe an ([11] S. 20). Da seit 1913 [8] verstärkt die eigentumsrechtliche Bedeutung der Grenze im Kataster wesentlich mehr Gewicht erhielt, auch was eine „gesicherte“ Aufmessung betrifft, ist zeitlich davor – vor allem was den öffentlich-rechtlichen Sektor betrifft – die numerische Eindeutigkeit der Festlegung sowie daraufhin die mögliche örtliche Wiederherstellbarkeit der Grenzen durch Abmarkungen in den Vordergrund zu stellen.

Dies hat auch eine Bedeutung für mitunter nicht dokumentierte Grenzanerkennungen in früherer Zeit bzw. als festgestellt geltende Grenzen: Die höchstrichterliche Rechtsprechung sieht in der Richtigkeitsvermutung des Grundbuchs auch den sich aus dem Vermessungszahlenwerk des Liegenschaftskatasters ergebenden Grenzverlauf – also auf numerischer Basis vorrangig gegenüber der Kartendarstellung (BGH V ZB 47/16 v. 20.7.2017, Rdnr. 19). Für die Richtigkeitsvermutung sind die Umstände, die zu einer grundbuchlichen Eintragung geführt haben, ohne Belang (BGH V ZR 11/05 v. 02.12.2005, Rdnr. 10). Dieses gilt wie jeher für die Eigentumsangaben im Grundbuch und muss letztendlich – unabhängig von Grenzanerkennungen – für im Kataster geführte Grenzverläufe und deren Zahlennachweise gelten. Deshalb ist es von Grund auf verschieden, ob etwas als abgeschlossener Sachverhalt im Zahlenwerk des Katasters bereits enthalten bzw. übernommen worden ist oder nach welchen z. B. filterartigen länderspezifischen Kriterien

es später oder zukünftig übernommen wird. Es ergäben sich sonst Widersprüche zwischen privatrechtlicher und öffentlich-rechtlicher Handhabe bei Grenzen. Man muss sich daran gewöhnen: Eine – wann und wie auch immer – erfolgte Übernahme des Vermessungszahlenwerkes in das Liegenschaftskataster beinhaltet dessen mit dem öffentlichen Glauben verankerte Richtigkeitsvermutung.

Da Ordinaten innerhalb der orthogonalen Aufnahme möglichst kurz sein sollten, hatte das häufig zur Folge, dass Messungslinien grenzbegleitend verliefen, dies vor allem bei beidseitigen Grenzverläufen wie bei Wegen und anderen langgestreckten Anlagen. Das wiederum führt dazu, dass einer Ordinate vielfach eine höhere grenzbestimmende Aufgabe zukommt. Sie ist dann ausschlaggebend für die Grenzlage, weil sie deren Richtung bestimmt, und damit einen größeren Einfluss auf eventuelle Abweichungen vom rechtmäßigen Grenzverlauf ausüben kann. Wegen dieser Bedeutung der Ordinaten – und aus einer Sorgfaltspflicht heraus – sollten oder wurden deren Fußpunkte, auch wenn sie selbsteinrichtend in die Gerade mit einem Doppelprisma bestimmt wurden, anschließend durch direktes Fluchten in der Messungslinie überprüft.

Die Genauigkeiten der Instrumente zum Abstecken bzw. der Aufnahme von rechten Winkeln liegen beim Winkelprisma bei ± 20 mgon bis hin zur Kreuzscheibe bei ± 50 mgon ([12] S. 147, [13], [14]), was bei einer Ordinatenlänge von 10 m zu einer Abszissenunsicherheit von ca. ± 3 mm bis ± 8 mm führt; bei längeren Ordinaten natürlich proportional mehr. Die Erzeugung auch langer

rechter Winkel durch Prismen erwies sich als genauer (um 1900) als deren Bildung durch Streckenmessungen im Dreieck unter Berücksichtigung der Längenfehlergrenzen [15]. Eine Richtungskontrolle durch Längenmessungen erwies sich als nicht hinreichend.

Die signifikanten Fehlerquellen bei der Erzeugung rechter Winkel sind also nicht instrumentenbedingt, sondern liegen eher in der Güte der Anschlusspunkte, Handhabung, Sichtverhältnisse, Übung und Einstellung des Beobachters (und damit von äußeren Einflüssen und Widrigkeiten) und in der Streckenmessung begründet.

Bei Urmessungen im 19. Jahrhundert kann es vorkommen, dass bei kurzen Ordinaten aus Vereinfachungsgründen keine Rechtwinkelzeichen in die Risse eingetragen wurden, auch wenn sie nach Augenschein bestimmt wurden. Die Rechtwinkligkeit muss durchaus gegeben sein, weil eine Kartierung sonst nicht möglich gewesen wäre. Damals war jede Messung für das Grundsteuerkataster Grundlage für eine Kartenherstellung oder deren Ergänzung.

In Preußen konnten bis 1896 rechte Winkel mit Lotabständen bis 10 m nach Augenmaß bestimmt werden ([3] § 14 Nr. 3). Dies wird in [16] S. 15 praxisnah bestätigt. Über dieses Maß hinaus musste ein Winkelinstrument eingesetzt werden. Nach 1896 wurde dieses Maß auf 5 m herabgesetzt ([4] § 14 Nr. 6). Solche Kriterien gab es seit 1913 nicht mehr. Am Rechtwinkelzeichen als einfacher oder doppelter Viertelkreis ist erkennbar, ob durch Augenmaß oder ein Instrument eine Perpendikularlinie (Senkrechte, Lot) bestimmt wurde.

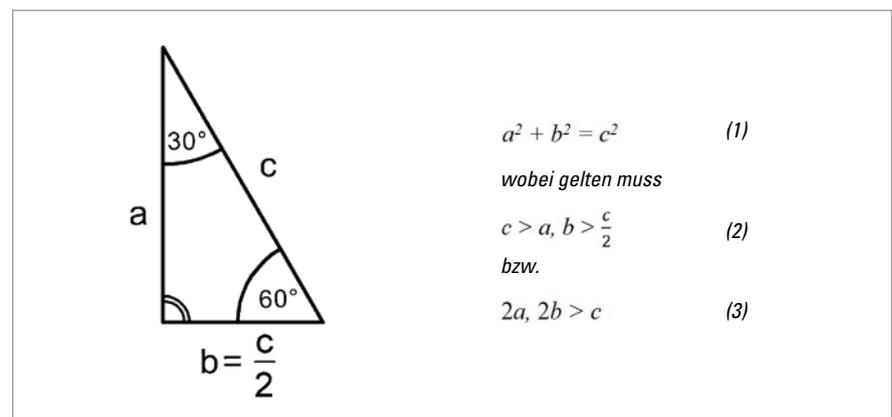


Bild 2: (Pythagorasprobe) In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete maßlich durch die Hypotenuse nur dann kontrolliert, wenn ihre doppelte Länge größer als die Länge der Hypotenuse ist.

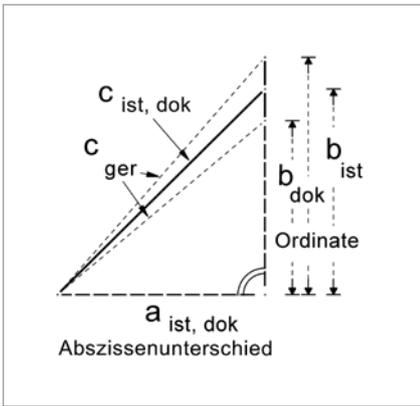


Bild 3: *ist* = tatsächliche Länge
ger = gerechnet (Pythagoras)
dok = im Riss dokumentiert

Kontrollwirksamkeit bei orthogonalen Elementen

Gemessene Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck werden als gegenseitig kontrolliert angesehen, wenn die aus gemessenen Katheten berechnete Hypotenuse mit der gemessenen übereinstimmt. Gleichzeitig wird mit dieser Berechnung die Rechtwinkligkeit der Katheten zueinander überprüft. Die Dreiecksseiten müssen Bedingungen wie im Bild 2 genügen (Pythagorasprobe).

Diese allgemein akzeptierte, fiktive Regel ([17] S. 37) führt dazu, dass die Winkel beider Katheten zur Hypotenuse in dem Bereich zwischen 30° und 60° liegen müssen. Ansonsten wird nur die Kathete geprüft, die mit der Hypotenuse den kleinsten Winkel einschließt. Die Winkelwerte von 30° und 60° sind ursprünglich fehlertheoretisch nicht begründet, sondern sie bestehen näherungsweise wegen ihrer einfachen Handhabung und aus praktischer Einsicht. Eine strenge fehlertheoretische Untersuchung, die auf ebenso festgesetzte, vorgegebene Streckenfehlergrenzen in den damals auch unterschiedlichen Geländeklassen (vor 1974 in NRW) zugreifen müsste, würde auf unterschiedliche Winkel führen [18].

Als Regel ist auch folgende Form gebräuchlich: Eine Kathete darf höchstens doppelt oder halb so lang sein wie die andere, wenn beide durch ein Spanmaß oder eine Strebe kontrolliert sein sollen.

$$0,5 < \frac{a}{b} < 2,0 \quad (4)$$

Wir betrachten die Konfiguration im Bild 3, wie sie häufig bei einer orthogonalen Aufnahme mit der Strebe c auftritt, wobei b eine „fehlerhafte“ Ordinate ist. Hier besteht eine Diskrepanz zwischen der tatsächlichen

und der wie auch immer entstandenen, im Riss dokumentierten Lotlänge.

Bei einem nahezu gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck, also bei $a \approx b$, kann im Extremfall auftreten, dass eine Kathete mit einem verlängernden oder verkürzenden Fehler behaftet sein kann, der dem errechneten Hypotenusenfehler $|d_c| = |c_{ger} - c_{ist}|$ um den Faktor $\sqrt{2}$ übertrifft (vgl. dazu Bild 4a, dargestellt mit positiven Werten). Dies ist aus der Pythagorasprobe selbst nicht erkennbar; es kann demnach also sein, dass $|\pm d_a|$ bzw. $|\pm d_b| < |\pm \sqrt{2} d_c|$ ist. Dieses Phänomen wurde und wird in der Praxis aus Gründen der Vereinfachung aber übergangen.

Erweitert man diese Betrachtungsweise auf den oben geschilderten Grenzfall mit Dreieckswinkel von 30° bzw. 60° erhält man sogar $|\pm d_a|$ bzw. $|\pm d_b| < |\pm 2 d_c|$ (Bild 4b). Zur Veranschaulichung dienen die numerischen Beispiele im gleichschenkligen Dreieck und im oben festgelegten Grenzfall eines Dreiecks mit 30°/60°-Winkel im Bild 4. Es kann also bei entsprechender Konfiguration in einem rechtwinkligen Dreieck sein, dass eine Kathete einen doppelten Fehler besitzt, als durch die Differenz zwischen gemessener und aus Katheten berechneter Hypotenuse ermittelt wird. Legt man die Formel (4) zugrunde sind die maximalen Werte für $|\pm d_a|$ bzw. $|\pm d_b| = |\pm \sqrt{5} d_c| \approx |\pm 2,24 d_c|$.

Würde man die kurze Kathete beispielsweise immer weiter halbieren, werden die Ungenauigkeiten der Pythagoras-

probe und damit die Unbrauchbarkeit für vermessungstechnische Zwecke zur Kontrolle orthogonaler Messelemente bzw. zur Aufdeckung von Messungsfehlern immer augenscheinlicher (Bild 5), dazu Beispiele:

$$(c^2 = a^2 + b^2, \text{ hier } d_a = 0, d_b = \text{Ordinatenfehler})$$

$$20,00^2 = 17,32^2 + 10,00^2$$

$$20,05^2 = 17,32^2 + 10,10^2; \quad d_b = 10 \text{ cm}$$

$$20,00^2 = 19,36^2 + 5,00^2$$

$$20,05^2 = 19,36^2 + 5,20^2; \quad d_b = 20 \text{ cm}$$

$$20,00^2 = 19,84^2 + 2,50^2$$

$$20,05^2 = 19,84^2 + 2,88^2; \quad d_b = 38 \text{ cm}$$

$$20,10^2 = 19,84^2 + 3,20^2; \quad d_b = 70 \text{ cm}$$

Das totale Differenzial dazu lautet (vgl. Bild 5, [15]):

$$a \cdot da + b \cdot db = c \cdot (dc_a + dc_b) = c \cdot dc \quad (5)$$

Allgemein ist d als Einzelwert keiner stochastischen Abweichung zuzuordnen, der Mehrfachmessungen oder einer Varianzfortpflanzung zugehörig sein könnte. Eine Pythagorasprobe ist autark und hat keine Verbindung zu anderen. d ist alleinig und damit als Fehler (= Unrichtigkeit, Messabweichung = Dokumentierter Messwert – Wahrer Wert) bzw. Ausmaß der (Mess-)Abweichung von der richtigen Lage (= Richtigkeit, vgl. DIN 55350 Teil 13 Nr. 2.1.1) Bestandteil einer eigenständigen, funktionalen Behandlung hier in additiver Form als einzelner, fester Wert. Das Ganze ist vergleichbar, aber nicht identisch mit der line-

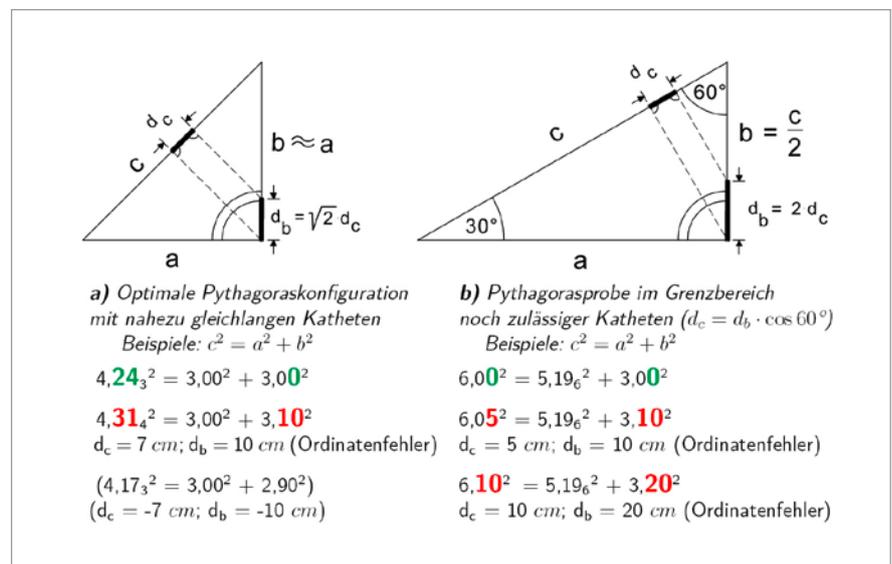


Bild 4

a) Optimale Pythagoras-Konfiguration mit nahezu gleichlangen Katheten

Beispiele: $c^2 = a^2 + b^2$

$$4,24^2 = 3,00^2 + 3,00^2$$

$$4,31^2 = 3,00^2 + 3,10^2$$

$d_c = 7 \text{ cm}; d_b = 10 \text{ cm}$ (Ordinatenfehler)

$$(4,17^2 = 3,00^2 + 2,90^2)$$

$(d_c = -7 \text{ cm}; d_b = -10 \text{ cm})$

b) Pythagorasprobe im Grenzbereich noch zulässiger Katheten ($d_c = d_b \cdot \cos 60^\circ$)

Beispiele: $c^2 = a^2 + b^2$

$$6,00^2 = 5,19^2 + 3,00^2$$

$$6,05^2 = 5,19^2 + 3,10^2$$

$d_c = 5 \text{ cm}; d_b = 10 \text{ cm}$ (Ordinatenfehler)

$$6,10^2 = 5,19^2 + 3,20^2$$

$d_c = 10 \text{ cm}; d_b = 20 \text{ cm}$ (Ordinatenfehler)

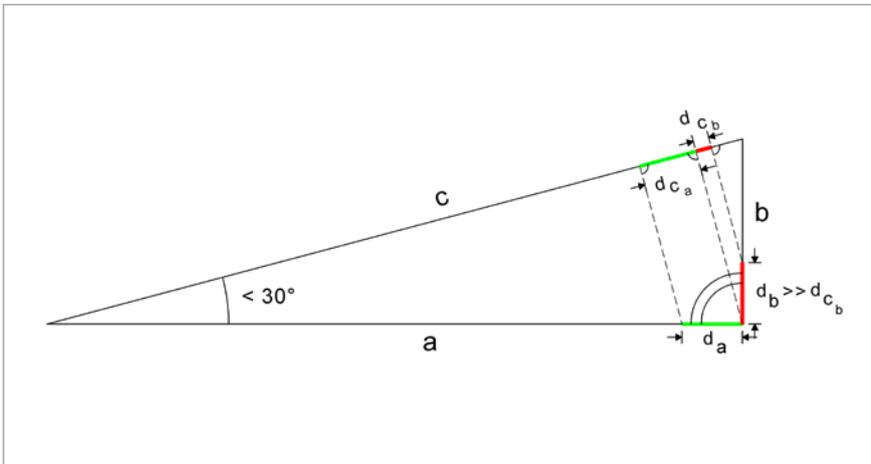


Bild 5

aren Fortpflanzung bei systematischen Messabweichungen (siehe [19] S. 81, 84; $d \pm \Delta$).

Zum anderen muss man sich ebenso im Klaren darüber sein, dass bei zwei oder drei zugleich fehlerhaften Elementen (z. B. bei $a \approx b$ mit $|+d_a| \approx |-d_b|$) die Pythagorasprobe zufallsbedingt aufgehen kann! Sie deckt Fehler dann nicht auf, ist unwirksam und nicht zuverlässig.

Eine ausschließliche Pythagorasprobe ist nur bedingt durchgreifend und stellt eine Näherung dar, weil sie prinzipiell von einer Orthogonalisierung des Katheteneckpunktes oder einer Projektion der Katheten auf die Hypotenuse ausgeht. Sie wirkt sozusagen nur eindimensional. Je kleiner eine Kathete wird, desto geringer ist ihr Fehlereinfluss auf die Hypotenuse – und damit die mögliche Aufdeckung eines Fehlers im Messwert der Kathete. Nur die größere Kathete lässt sich dann durch die Hypotenuse überprüfen (Bild 6).

Daraus folgt:

- Bei einer Pythagorasprobe wird strenggenommen die Hypotenuse durch die Katheten kontrolliert und nicht – wie eigentlich gewünscht und zweckmäßiger – die für die Festlegung des Punktes wichtigeren Katheten durch die Hypotenuse.
- Eine reine formale Anwendung der Pythagorasprobe gibt in manchen Fällen keine sichere Aussage darüber, dass Fehlergrenzen exakt bei den Katheten eingehalten wurden.

Die bessere Probe in einer orthogonalen Aufnahme wäre also die Überprüfung der Ordinate durch ein schmaleres Dreieck bei

kurzern Abszissenunterschied und zuzüglich der Kontrolle des Abszissenmaßes durch eine Grenzlänge, wobei Kathete und Grenze dann etwa rechtwinklig zueinander liegen müssten. Dadurch ist die Vorschrift der grundsätzlichen Messung von Grenzlängen auch begründet. Bild 7 zeigt dazu ein optimales Konfigurationsbeispiel, wobei der Ordinatenwert durch die Strebe, das Abszissenmaß durch die Steinbreite und damit die Punktlage kontrolliert wird.

Weil sich vorwiegend die Messung von Ordinaten und Streben (Hypotenusen) auf ein und dieselbe Messlinie beziehen, liegt eine starke Korrelation vor und damit keine Unabhängigkeit der Daten. Die Pythagorasprobe ist ein Hilfsmittel zur Fehleraufdeckung im Rahmen der inneren Genauigkeit. Fehler in den Ordinatenlängen werden bei entsprechender Dreieckskonfiguration auch durch

die Ausgleichsrechnung wegen der Verschmierungseffekte nicht aufgedeckt. Es fehlt mindestens die doppelte, unabhängige Überbestimmung als Beitrag zur Zuverlässigkeit.

Spezielle Grenzwerte für maximal zulässige Streckenabweichungen bei Pythagorasproben hat es nicht gegeben; die für alle Strecken gültigen Grenzwerte waren auch hier anzuhalten. Wobei zu bemerken ist, dass der Vergleich der berechneten mit den zulässigen Abweichungen immer mit der längsten Strecke, nämlich der Hypotenuse, erfolgte. Dies musste zu günstigeren Vergleichen führen, als wenn die kürzeren, mit engeren Fehlergrenzen versehenen und wichtigeren Katheten im Spiel gewesen wären! [18]

Als numerisches Beispiel dazu diene mit folgender Fehlergrenzformel (Fortführungsanweisung II NRW 1955, mittlere Verhältnisse) $D = 0,05 + 0,01 \cdot \sqrt{s} + 0,0004 \cdot s$:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit $30^\circ/60^\circ$ -Winkel und $a = 17,32\text{m}$, $b = 10\text{m}$ (Ordinate) und $c = 20\text{m}$. Nach vorstehender Formel wird für $c = 20\text{m}$ die maximal zulässige Abweichung (Grenzwert) berechnet mit $d_c = 0,103\text{m}$. Der Grenzwert für $b = 10\text{m}$ be-

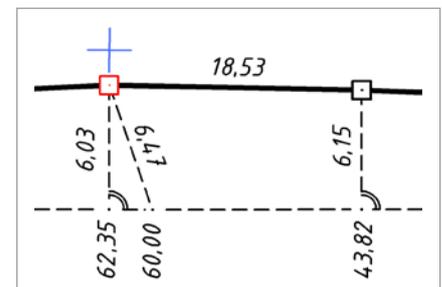


Bild 7

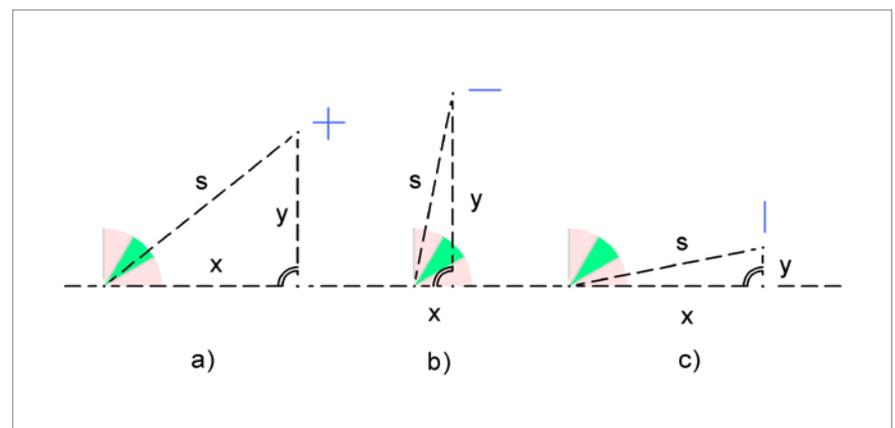


Bild 6: Allgemein akzeptierte orthogonale Kontrollen in verschiedenen Positionen der Dreiteilung eines rechten Winkels:

- Die Strebe s kontrolliert x und y
- Die Strebe s kontrolliert nur y
- Die Strebe s kontrolliert nur x

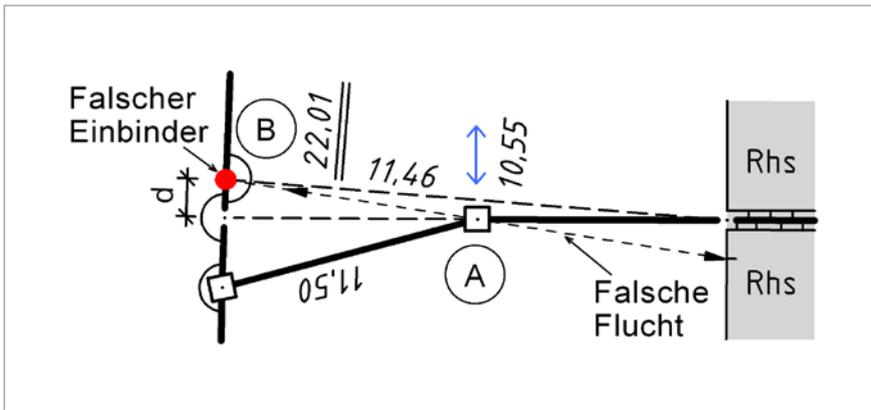


Bild 8: Die lineare Kontrolle mit einer unterschiedlichen Wirkung bezüglich der Messungselemente und andererseits der örtlichen Punktlage. Ein ungenauer oder falscher Einbinder in B führt zu einer unsicheren Punktlage in A.

trägt 0,086m. Mit $a=17,32\text{m}$ und $c=20,103\text{m}$ ergibt sich für $b=10,205\text{m}$, damit $d_b=0,205\text{m}$. Der absolute Ordinatenfehler konnte hier das 2,4-fache ($=0,205/0,086$) des Hypotenusenfehlers betragen.

Bei der äußerst seltenen Methode, neben dem rechten Winkel denselben Punkt zusätzlich mit einem 45°-Prisma auf die Messungslinie aufzunehmen, hätte man durch den übereinstimmenden Vergleich zwischen Abszissenunterschied und der Ordinate eine direkte, wirksame Kontrolle, ohne die Hypotenuse messen zu müssen [20]. Das Verfahren hat sich nicht durchgesetzt.

Versagen und Schwächen

Die häufigsten Fehlerquellen einer Aufnahme dürften neben falschen Ablesungen und Maßverwechslungen erfahrungsgemäß Fluchtungsfehler sein, nämlich falsche Schnittpunktbildungen vor allem bei Einbindern mit Gebäuden (Bild 8) und im Zusammenhang mit Anschlusspunkten (Bild 9). Bei Grenzzeichen wird – weil nicht möglich – nicht direkt auf sie gefluchtet, sondern immer ersatzweise auf Fluchtstäbe. Richtungsmäßig falsch ausgesteckte Punkte und Irrtümer durch falsch identifizierte Fluchtstäbe sind häufig Ursachen von Fluchtungsfehlern. Es herrschte die Regel, um Verwechslungen zu vermeiden, unbenutzte Fluchtstäbe nicht senkrecht, sondern schräg in den Boden zu stecken, um sie als nicht benutzt deutlich erkennbar zu machen. Denn nicht gebrauchte Fluchtstäbe dürfen nicht auf den Erdboden gelegt werden, weil sie bei der Beendigung der Arbeit (vielleicht im Gras) übersehen werden könnten. Es bleibt zu bezweifeln, ob dies immer beherzigt wurde, und deshalb Fehlfluchtungen bei Schlussvermessungen vor-

kommen mussten. Fluchtungsfehler als grobe Fehler sind aus einem Datenbestand nicht immer erkennbar, aber wenn sie entdeckt werden kaum zu bereinigen. Vermessungstechnische Kontrollen im Kataster unterscheiden sich in:

- Alleinig örtlich durchzuführende, zeitnahe, nicht durch Messdaten nachgewiesene Überprüfungen.
- Kontrollen aufgrund dokumentierter Messwerte sowie Konstellationen, die auch tatsächlich überprüft und dokumentiert wurden, und somit auch später rechnerisch nachzuvollziehen sind.

Der Vorteil der Pythagorasproben bei den orthogonalen Aufnahmen waren deren Feldtauglichkeit, d. h. Kontrollen konnten noch an Ort und Stelle, zumindest bei kleineren Fortführungen, durchgeführt und eventuelle Unstimmigkeiten unmittelbar örtlich geklärt werden. Diese Berechnungen konnten auch direkt auf dem Fortführungsriß dokumentiert werden.

Der Nachweis der Geradlinigkeit von Punkten auf einer Messungslinie geschah in den meisten Fällen nur durch die örtliche, vi-

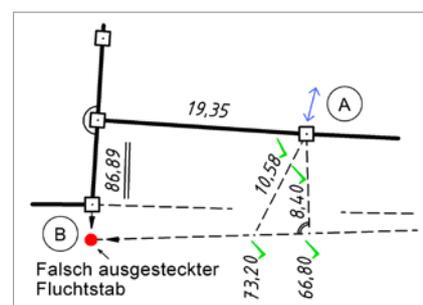


Bild 9: Beispiel der Abhängigkeit einer orthogonalen Aufnahme bzw. der Messwerte und deren nur scheinbar richtigen Kontrolle (Pythagoras) durch handwerkliche Fehler; entn. [10].

suelle Nachfluchtung; z. B. auch die Geradlinigkeitsprüfung von mit Winkelprismen erzeugten Lotfußpunkten auf einer Messungslinie. Daraus resultiert auch die Annahme, dass Ordinaten wegen ihres Einflusses auf den Grenzverlauf genauer bestimmt werden sollten. Den Abszissenmaßen – gerade bei längeren Linien – wurde eine größere Ungenauigkeit zugesprochen, auch wegen des stärkeren Einflusses systematischer Anteile und Unzulänglichkeiten, wie sie im Bild 10 angedeutet werden, und der unglücklichen Fehlerfortpflanzung durch mehrfache Bandlängen bzw. eine Addition von Einzelmessungen vorliegt.

In Verbindung mit dem Linien- bzw. Einbindeverfahren treten folgende Unzulänglichkeiten und Fehler auf (wegen der thematischen Zugehörigkeit tlw. aus www.grenzuntersuchung.de entn.):

- Additionsfehler bei separat gemessenen Teilstücken einer Messungslinie oder auf (angeblichen) Geraden (z. B. in eng bebauten Ortslagen)
- Vertauschung von Anfangs- und Endpunkt einer Messungslinie (Richtungs-tausch um 200 gon). Dies kann auftreten, wenn ein berechneter Schnittpunkt in die Örtlichkeit falsch übertragen und vermarktet, aber vom Ursprung her korrekt dokumentiert wurde, z. B. bei der Schnittpunktmarkierung einer abgehenden Grenze bei einer Straßenschlussvermessung (menschlicher Orientierungsirrtum).
- Nichteinhalten der Geradlinigkeit, Verbiegung durchlaufender Messungen
- Fluchtungsfehler durch falsch oder seitlich ausgesteckte Anschlusspunkte, falsche Signalisierung oder Identifizierung (Bild 9)
- Durchhang des Messbandes. Diese Fehlerquelle hat einen vergleichsweise starken Einfluss auf die Streckenlängen
- Schlechte Staffelung und Lotung bei geneigtem Gelände, schlechte Horizontierung oder nicht durchgeführte Reduktionen
- Übermäßige Verlängerungen
- Nullpunkt- bzw. Anlegefehler bei Messbändern mit oder auch ohne Überteilung
- Fehlerhafte Messbandlänge bei durchlaufender Messung: Fehler können auch im Messvorgang beim Wechsel der vollen Bandlängen auftreten, die durch Kontrollen nicht aufgedeckt werden (Bild 10).

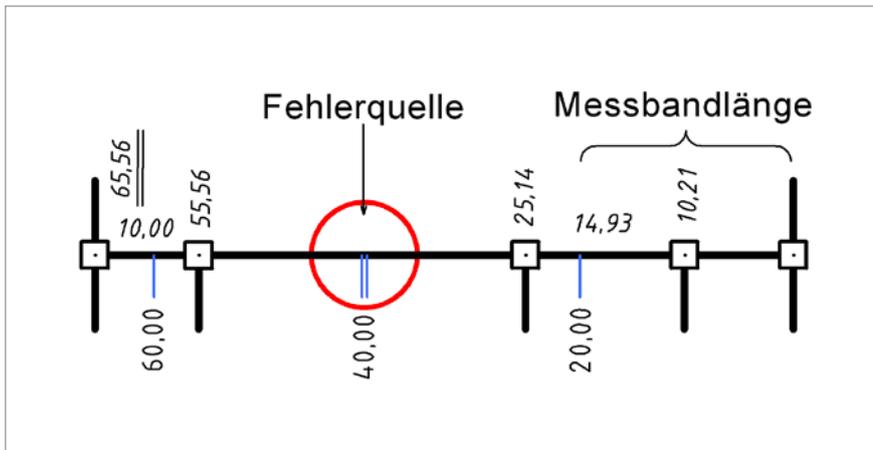


Bild 10: Fehlerhafte Messbandlänge bzw. unsichere Handhabung am Wechsellpunkt

Mit der üblichen Kontrolle, bei durchlaufenden Messungen jede zweite Grenzlänge zu messen, werden zwar die Maßzahlen – also die Ablesungen und die Dokumentation – geprüft, aber je nach Situation nicht die Messung als solche.

- Übermäßig lange, parallel verlaufende oder sich überlagernde Messungslinien mit schleifenden Schnitten und mit teilweise entgegengesetzten Messrichtungen
- Mit einem Messband werden sehr lange Strecken zu lang bzw. eine Strecke im Winter länger als im Sommer gemessen (Temperatureinfluss).
- Falsche Fehlerverteilungen, Mängel in der Zurückführung von Maßen
- Kommunikationsfehler (Hör- und Schreibfehler in der Datenübertragung), Verwechslungen

Speziell bei orthogonalen Elementen können folgende Unzulänglichkeiten und Fehler auftreten:

- Irrtümliche Vertauschung (Spiegelung, Vorzeichenfehler) von rechts- oder linksliegenden Ordinaten als Absteckungs- oder Dokumentationsfehler (Bild 11) mit Auswirkungen auf die Ermittlung von Koordinaten und Flächen. Auch Spannmaßkontrollen zur Messungslinie hin können derartige Fehler nicht aufdecken. Eine solche elementare Fehlerquelle wäre wiederum bei einer Absteckung durch Koordinaten nicht denkbar.
- Für die Grenzuntersuchung sind Kontrollstreben nicht verwendbar, weil deren Endpunkte auf der Messungslinie i. d. R. unvermarkiert sind.
- Nichtbeachten der Verhältnisse zwischen Katheten und der Hypotenuse

- Zahlendreher: z. B. 5,45 statt 5,54 (wichtig auch bei Ordinaten)
- Keine Verteilung der Abweichungen

Ausblick

Demnach ist die Pythagorasprobe trotz jahrzehntelanger praktischer Übung [18] für Katheten eine nicht zuverlässige und nur bedingt wirksame Messungskontrolle. In manchen Katastervorschriften wurde es für erstrebenswert gehalten, dass die Hälfte oder zwei Drittel der Grenzwerte für Strecken nicht überschritten werden sollten. Die Wirkungsweise der Pythagoraskontrolle hätte dies für sie verlangen müssen, was in früheren Vorschriften erstaunlicherweise nicht berücksichtigt wurde.

Mängel innerhalb der orthogonalen Aufnahme dürfen keine Einschränkung der Rechtmäßigkeit von Grenzen beinhalten. Die orthogonale Aufnahme hat sich durch ihre Eigenart und Einfachheit in Messung und Dokumentationsform in der Vergangenheit bewährt, auch wenn sie gegenwärtig durch andere Verfahren abgelöst wurde.

Kenntnisse der orthogonalen Aufnahme, auch wie sie hier beschrieben wurden, sind in der Grenzuntersuchung nach wie vor von Bedeutung. Die fachgerechte Beurteilung der Güte einer alten Aufnahme durch den Vergleich orthogonaler Umformungen aus neueren Koordinatenbestimmungen mit dem ursprünglichen, orthogonalen Datenbestand zur Identitätsprüfung verlangt unter anderem dieses Expertenwissen. Identitätsprüfungen mit älteren, vielleicht durch Transformation und mit unklarer Herkunft entstandenen Grenzpunktkoordinaten ersetzen keine Vergleiche mit ursprünglich orthogonalen und linearen Messelementen.

Dies wird besonders deutlich, wenn – wie im Erhebungserlass 2017 NRW [21] Nr. 32.2.1 enthalten – im Koordinatenkataster für die endgültige Koordinatenbestimmung von Grenzpunkten eine letztmalige Grenzuntersuchung aus der Nachbarschaft unter Berücksichtigung der rechtlich maßgebenden Bedingungen durchzuführen ist. Diese „Endgültigkeit“ erfordert ein gründliches, sorgfältiges Hinsehen.

Durch die im Koordinatenkataster herrschenden, strengeren maximal zulässigen Lageabweichungen, ferner wegen der eingeschränkten Kontrollmöglichkeiten in den Hypotenusen-Messungen und anderer Schwächen, wären orthogonale Aufnahmen in der klassischen Form innerhalb größerer Messungen heutzutage nicht mehr angebracht. Nach aktuell gültigen Vorschriften werden sie nicht mehr ausgeführt; so sind sie dennoch – weil einfacher Art – in beschränktem Rahmen bei kleineren Vermessungen, Nachmessungen und in sehr lokalen Bereichen als zweckmäßig und wirtschaftlich anzusehen.

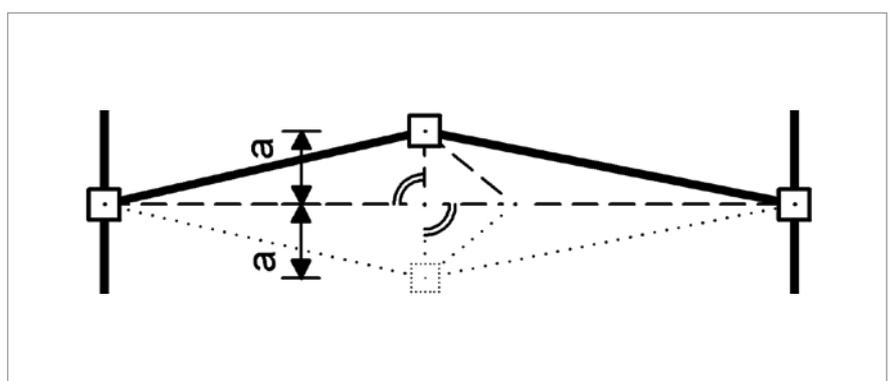


Bild 11: Vertauschung einer Ordinate (Spiegelung)

Kommentar: Klassische orthogonale Aufnahme

In meiner Abschlussprüfung zum Vermessungstechniker gab es folgende Frage: „Warum werden Koordinaten berechnet?“ Antwort: „Die Koordinaten dienen zur Kontrolle der Feldmaße.“ Das klassische mit einem Messband gemessene Feldmaß ist selbstverständlich noch nicht gänzlich aus der vermessungstechnischen Praxis verschwunden. Die klassische orthogonale Aufnahme ist aber doch durch die aktuellen Aufnahmearten verdrängt worden. Die Feldmaße „entstehen“ heute im Vermessungsinstrument und das Ergebnis sind die Koordinaten. Das mit dem Messband gemessene Feldmaß kontrolliert heute die Koordinaten (?). Das ist sicherlich etwas überspitzt formuliert. Die älteren Kolleginnen und Kollegen werden sich an Messungen mit Winkelprisma, Fluchtstäben und Messband erinnern. Es ist gut davon noch eine Ahnung zu haben. Eine Vorausberechnung von Koordinaten aus einer klassischen orthogonalen Aufnahme kann – bei aller Sorgfalt – Fehler enthalten. In der heutigen Praxis tauchen die orthogonalen Aufnahmen vorwiegend und häufig in den Vermessungsunterlagen (Zahlenwerk) des Liegenschaftskatasters auf. Dies mit aktuellen Auswirkungen auf bestehende Grenzen, die es zu überprüfen gilt, so bei Fortführungsvermessungen und dazugehörigen Grenzuntersuchungen. Davon handelt der vorliegende Fachartikel.

Wenn die klassische orthogonale Aufnahme noch bekannt ist, gibt es noch einen Vorteil. Sollten die Batterien leer sein, kann man vielleicht noch ein paar Punkte messen – vorausgesetzt man besitzt noch ein Winkelprisma.

Achim Dombert

Literatur

[1] *Ergänzungsbestimmungen 1. Teil vom 1. Juni 1931 zu den Anweisungen VIII, IX und X für das Verfahren bei den Katasterneumessungen (Preußen), hierzu Anlage 37 zu Nr. 116.*

[2] *Zeichenvorschrift-Riß NRW (ZV-Riß), RdErl. d. Innenministeriums v. 6.6.1997, S. 26.*

https://www.katastermodernisierung.nrw.de/documente/broschuerenerlasse/zv_riss.pdf

[3] (II.) *Anweisung vom 31. März 1877 für das Verfahren bei den Vermessungen behufs der Fortschreibung der Grundsteuerbücher und Karten in der Provinz Westfalen und der Rheinprovinz, Berlin 1877.*

<http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:6:1-199764>
<https://sammlungen.ulb.uni-muenster.de/hd/content/pageview/4022838>

[4] (II.) *Anweisung vom 21. Februar 1896 für das Verfahren bei den Vermessungen zur Fortschreibung der Grundsteuerbücher und Karten, Berlin 1896.*

<http://resolver.staatsbibliothek-berlin.de/SBB0000371800000007>

[5] (VIII.) *Anweisung vom 25. Oktober 1881 für das Verfahren bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1882.*

<http://resolver.staatsbibliothek-berlin.de/SBB000047D900000049>

[6] *Anweisung vom 7. Mai 1868 für das Verfahren bei den Vermessungsarbeiten zur Vorbereitung der Ausführung des Gesetzes vom 21. Mai 1861, betreffend die anderweitige Regelung der Grundsteuer, in den Provinzen Schleswig-Holstein, Hannover und Hessen, Verlag Decker, Berlin 1868.*

<http://resolver.staatsbibliothek-berlin.de/SBB000042E900000037>

[7] (10.) *Auszug aus der Verfügung des Finanzministers an die Regierung zu B., betreffend die Messungsproben bei den Fortschreibungsvermessungen etc. Vom 6.12.1882, Berlin, Mitteilungen aus der Verwaltung der direkten Steuern im Preußischen Staate Nr. 16 (1883) S. 17–18.*

<http://resolver.staatsbibliothek-berlin.de/SBB0000D43D00060023>

[8] *Ergänzungsvorschriften für die Ausführung von Fortschreibungsvermessungsarbeiten (vom 21. Februar 1913), Reichsdruckerei, Berlin 1913.*

[9] *Abendroth, Der Landmesser im Städtebau – Praktisches Handbuch zur sachgemäßen Erledigung der landmesserischen Geschäfte im Gemeindedienst, 2. Auflage (1. Auflage 1901), Verlag Parey, Berlin 1909.*

[10] *Fuhrmann, Die Bedeutung unterirdischer Sicherungen von Grenzzeichen, VDVmagazin 5/2018, S. 390–396.*
http://www.grenzuntersuchung.de/attachments/article/8/390_396_VI_5_18_Fuhrmann.pdf

[11] *Kahlenberg, Grenzfeststellung und Pythagoras, Vermessung Brandenburg, Ministerium des Innern des Landes Brandenburg, 1/2013, S. 18–23.*

https://www.geobasis-bb.de/verm_bb/pdf/1_13_Kahlenberg_18-23.pdf

[12] *Jordan/Eggert/Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde, Band II Feld- und Landmessung, Absteckungsarbeiten, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 10. Auflage 1963.*

[13] *Löschner, Über die Genauigkeit im Fällen von Ordinaten bei Koordinatenaufnahmen – Genauigkeitsuntersuchungen mit Winkelabsteckern, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Verlag Vieweg Braunschweig, 1926 Bd. 46, S. 497–519.*

[14] *Lüdemann, Über die Genauigkeit der Absteckung eines rechten Winkels mit Winkelspiegel und Winkelprismen, AVN 3/1927, S. 34–37 (Mit umfangreichem Literaturverzeichnis).*

[15] *Schulze, Fehlertheoretische Untersuchung einer in der landmesserischen Praxis häufig vorkommenden geometrischen Aufgabe, AVN 1905, S. 317–327.*

[16] *Bürgel, Die Bearbeitung der Fortschreibungsvermessungen, Zeitschrift des Kataster-Verbandes, Berlin, 3. Jahrg. 1896, S. 7–8, 14–17, 45–47.*

[17] *Haase, Notwendige und hinreichende Messungselemente bei der Fortführungsvermessung, Der Vermessungsingenieur 2/1986, S. 36–41.*

[18] *Rüffel, Die Pythagorasprobe als Messungskontrolle, Nachrichtenblatt der Vermessungs- und Katasterverwaltung Rheinland-Pfalz 1/1969, S. 10–15.*

[19] *Benning, Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen, Verlag Wichmann, Heidelberg, 3. Auflage 2010.*

[20] *N. N., Beitrag zur Sicherung der Messungsergebnisse, Verbandsnachrichten des Verbandes Preussischer Katasterkontrolleure, 1910, S. 431–434.*

[21] *Erhebung der Geobasisdaten des amtlichen Vermessungswesens in Nordrhein-Westfalen – Erhebungserlass (ErhE), RdErl. d. Ministeriums des Innern v. 15.9.2017.*

https://recht.nrw.de/lmi/owa/br_vbl_detail_text?anw_nr=7&vd_id=16592&ver=8&val=16592&sg=0&menu=1&vd_back=N

Dipl.-Ing. Norbert Fuhrmann

Nussbaumallee 6
50169 Kerpen
n.fuhr@netcologne.de
<http://www.grenzuntersuchung.de>
<http://epflicht.ulb.uni-bonn.de/urn:nbn:de:hbz:5:2-182261>